Géométrie des racines d'un polynôme à coefficients complexes

Prérequis. *Interprétation géométrique des nombres complexes, polynômes et fractions rationnelles, applications linéaires.*

Définitions et notations.

- Dans tout le problème n est un entier naturel non nul. On note $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.
- Une partie A de $\mathbb{C}$ est dite *convexe* si pour tout couple $(z, z') \in A^2$, et tout réel $t \in [0,1]$, $(1-t)z + tz' \in A$. Cela signifie que pour tout couple (z, z') de points de A, le segment $[z, z']$ est inclus dans A.
- Si P est un polynôme complexe, on note $Z(P)$ l'ensemble des racines complexes de P.

Introduction. *Le thème central du problème est de localiser, pour un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, les racines de P' par rapport aux racines de P. Le premier résultat dans ce sens est le théorème de Gauss-Lucas de la partie II. Le théorème de Laguerre de la partie IV en est une généralisation qui sert dans V à prouver le théorème de Grace, lui-même utilisé dans VI.*

PARTIE I. *Enveloppe convexe d'une partie de $\mathbb{C}$.*

1. Montrer que l'intersection d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties convexes de $\mathbb{C}$ est une partie convexe (éventuellement vide) de $\mathbb{C}$.
2. Soit $A \subset \mathbb{C}$. On note E l'ensemble des parties convexes contenant A et on pose $C(A) = \bigcap_{X \in E} X$. Montrer que $C(A)$ est la plus petite partie convexe, au sens de l'inclusion, qui contient A. *On dit que $C(A)$ est l'enveloppe convexe de la partie A.*

Soit $A \subset \mathbb{C}$ non vide. On note $B(A)$ l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'éléments de A, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_p$ dans A et $t_1, \ldots, t_p$ dans $\mathbb{R}_+$ tels que $t_1 + t_2 + \cdots + t_p = 1$ et $z = t_1 a_1 + \cdots + t_p a_p$.

3. Soit $A \subset \mathbb{C}$ non vide. Montrer que $A \subset B(A) \subset C(A)$. Prouver ensuite que $B(A)$ est convexe, et en déduire que $B(A) = C(A)$.

PARTIE II. *Le théorème de Gauss-Lucas (1874).*

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}_n[X]$. On écrit $Z(P) = \{z_1, \ldots, z_p\}$ l'ensemble des racines distinctes de P et pour tout k on note α_k l'ordre de multiplicité de la racine z_k.

1. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{P'}{P}$.
2. Soit z une racine de P' n'appartenant pas à $Z(P)$. Montrer qu'on a
$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i (z - z_i)}{|z - z_i|^2} = 0.$$
En déduire que z est barycentre à coefficients strictement positifs des z_i.
3. Montrer que $Z(P') \subset C(Z(P))$ (théorème de Gauss-Lucas). En déduire en particulier que si D est un disque fermé de $\mathbb{C}$ contenant $Z(P)$, alors D contient aussi $Z(P')$.
4. On prend comme exemple $P = X^3 - iX^2 - X + i$. Déterminer $Z(P)$, $Z(P')$. Représenter dans le plan complexe l'enveloppe convexe de $Z(P)$ et vérifier le résultat de la question 3.

PARTIE III. *Dérivée polaire par rapport à un point.*

Soit $\xi \in \mathbb{C}$. On considère l'application $A_{\xi,n}$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le polynôme $A_{\xi,n}(P) = (\xi - X)P'(X) + nP(X)$ appelé *dérivé polaire de P par rapport à ξ.*

1. Montrer que $A_{\xi,n}$ est une application linéaire de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.
2. Calculer les coefficients de $A_{\xi,n}(P)$ en fonction de ceux de P.
3. On écrit $P = C_n^0 \alpha_0 + C_n^1 \alpha_1 X + \cdots + C_n^n \alpha_n X^n$ et on écrit de même $A_{\xi,n}(P) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k b_k X^k$. Exprimer les b_k à l'aide des α_k.
4. En déduire le noyau et l'image de $A_{\xi,n}$.

PARTIE IV. *Théorème de Laguerre.*

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ de degré n et D un disque fermé de $\mathbb{C}$ contenant toutes les racines de P. Soit ξ un complexe n'appartenant pas à D.

1. Montrer que l'image de D par l'application $z \longmapsto \frac{1}{z - \xi}$ est un disque fermé D' de $\mathbb{C}$.
2. Soit $R(X) = \frac{P(X)}{(X-\xi)^n}$. Calculer R'. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, dont on précisera le degré et les coefficients, tel que :
$$R(X) = Q\left(\frac{1}{X - \xi}\right)$$

3. Montrer que les racines de Q sont dans D', ainsi que celles de Q'.
4. En déduire que les racines de $A_{\xi,n}(P)$ sont toutes dans D.
   C'est le théorème de Laguerre.

PARTIE V. *Théorème de Grace (1902).*

Soient P, Q deux polynômes de degré n que l'on écrit : $P = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k X^k$. On dit que P et Q sont *apolaires* si $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k a_k b_{n-k} = 0$.
On note $\xi_1, \dots, \xi_n$ les n racines (pas forcément distinctes) de Q et on pose $P_1 = A_{\xi_1,n}(P)$, $P_2 = A_{\xi_2,n-1}(P_1), \dots, P_n = A_{\xi_n,1}(P_{n-1})$.

1. Quel est la valeur du polynôme constant P_n ?
2. Soit D un disque fermé contenant $Z(P)$. On suppose que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\xi_i \notin D$. Montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Z(P_i) \subset D$.
3. En déduire que si P et Q sont apolaires, tout disque fermé contenant $Z(P)$ contient au moins une racine de Q (théorème de Grace).
4. Un exemple. Soit $P = a_n X^n - X + 1$, $a_n \neq 0$, $n \geqslant 2$. Montrer que P admet toujours une racine dans le disque $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z-1| \leqslant 1\}$. On pourra étudier l'apolarité de P et de $Q = (1-X)^n - 1$.

PARTIE VI. *Théorème de Grace-Heawood (1907).*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n supposé ici supérieur à 2.

1. On suppose dans les questions 1 et 2 que $P(1) = P(-1) = 0$. Montrer que P' et $Q = (X-1)^n - (X+1)^n$ sont apolaires.
2. En déduire que le disque fermé de centre 0 et de rayon $\operatorname{cotan} \dfrac{\pi}{n}$ contient un zéro de P'.
3. De manière plus générale, si $z_1 \neq z_2$ sont deux racines de P, montrer que le disque fermé de centre $\dfrac{z_1 + z_2}{2}$ et de rayon $\dfrac{|z_1 - z_2|}{2} \operatorname{cotan} \dfrac{\pi}{n}$ contient une racine de P'. *C'est le théorème de Grace-Heawood, que l'on peut voir comme un lemme de Rolle complexe.*
4. En déduire le théorème d'Alexander-Kakeya-Szegö : si $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n admet deux racines dans un disque de rayon $R > 0$, alors P' admet au moins une racine dans le disque fermé de même centre et de rayon $\dfrac{R}{\sin \pi/n}$.

Géométrie des racines d'un polynôme à coefficients complexes

PARTIE I. *Enveloppe convexe d'une partie de* $\mathbb{C}$.

1. Soit (z, z') deux points de $\bigcap_{i\in I} A_i$ et $t \in [0,1]$. Soit $i \in I$. Comme A_i est convexe, $(1-t)z + tz' \in A_i$. Donc $(1-t)z + tz' \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Cela prouve que $\bigcap_{i\in I} A_i$ est convexe.
2. L'ensemble E n'est pas vide car $\mathbb{C} \in E$. D'après la question 1, $C(A)$ est convexe, contient évidemment A et est inclus, par définition, dans tout convexe K qui contient A. Donc $C(A)$ est la plus petite partie convexe, au sens de l'inclusion, qui contient A.
3. Il est clair que $A \subset B(A)$. Comme $C(A)$ est convexe, il est aisé de montrer par récurrence sur p, que tout élément de la forme $t_1a_1 + \cdots + t_pa_p$, avec $a_i \in A$, $t_i \geqslant 0$, $t_1 + \cdots + t_p = 1$, est dans $C(A)$ (pour $p = 2$ c'est la définition de la convexité). Donc $B(A) \subset C(A)$.
Or, il est aisé de vérifier que $B(A)$ est convexe. Comme $B(A)$ contient A on a $C(A) \subset B(A)$, d'où l'égalité.

PARTIE II. *Le théorème de Gauss-Lucas (1874).*

1. On a $P = \prod_{i=1}^{p}(X - z_i)^{\alpha_i}$. En utilisant la dérivation d'un produit de p termes, il vient

$$P' = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (X - z_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{j\neq i}(X - z_j)^{\alpha_j}$$

soit finalement

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{X - z_i}.$$

Par unicité, il s'agit de la décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{P'(X)}{P(X)}$. Remarquons que la fraction $\dfrac{P'}{P}$ est la dérivée logarithmique de P. L'égalité ci-dessus s'obtient directement si l'on sait que la dérivée logarithmique d'un produit est la somme des dérivées logarithmiques.

2. Soit z une racine de P' n'appartenant pas à $Z(P)$. On a alors

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{z - z_i} = 0$$

En multipliant chaque fraction de la somme par le conjugué du dénominateur, il vient

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i(\bar{z} - \bar{z}_i)}{|z - z_i|^2} = 0$$

Si cette somme est nulle, sa conjuguée aussi. D'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i(z - z_i)}{|z - z_i|^2} = 0$.

Cela s'écrit encore

$$z = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i z_i}{|z - z_i|^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{|z - z_i|^2}},$$

expression qui montre que z est barycentre de $z_1, \ldots, z_p$ affectés des coefficients respectifs $\dfrac{\alpha_i}{|z - z_i|^2} > 0$.

3. Soit $z \in Z(P')$. Si z est une racine de P, on a $z \in Z(P)$ et a fortiori $z \in C(Z(P))$. Supposons que z n'est pas racine de P. D'après la question précédente et la question I.3, z appartient à $C(Z(P))$. On a donc

$$Z(P') \subset C(Z(P))$$

Si D est un disque fermé de $\mathbb{C}$ qui contient $Z(P)$, comme D est convexe, il contient $C(Z(P))$, donc contient $Z(P')$.

4. Soit $P = X^3 - iX^2 - X + i$. On a aisément $P = (X-1)(X+1)(X-i)$ soit $Z(P) = \{-1, 1, i\}$. L'enveloppe convexe de $Z(P)$ est le triangle plein de sommet $-1, 1$ et i. On a $P' = 3X^2 - 2iX - 1$. Les racines de P' sont $\frac{1}{3}(i \pm \sqrt{2})$. Comme $1 + \sqrt{2} < 3$ on vérifie facilement qu'elles sont dans le triangle précédent.

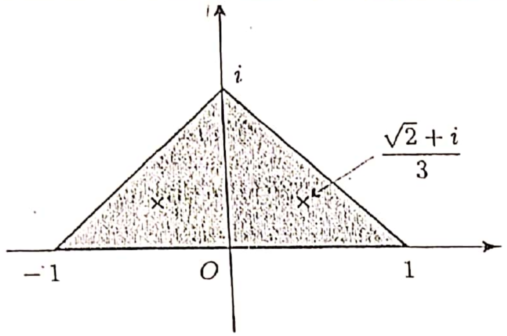

FIG. 2. *Enveloppe convexe des zéros de P.*

PARTIE III. *Dérivée polaire par rapport à un point.*

1. La linéarité de $A_{\xi,n}$ résulte directement de la linéarité de la dérivation. On a pour tout k,

$$A_{\xi,n}(X^k) = (\xi - X)kX^{k-1} + nX^k = (n-k)X^k + k\xi X^{k-1}.$$

Il en résulte que $A_{\xi,n}(X^k)$ est de degré k, sauf pour $k = n$ où il est de degré $n-1$ si ξ est non nul (et nul si $\xi = 0$). On en déduit que $A_{\xi,n}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

2. Il découle du calcul ci-dessus, que si $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ alors, par linéarité,

$$A_{\xi,n}(P) = \sum_{k=0}^{n-1}[(n-k)a_k + (k+1)\xi a_{k+1}]X^k.$$

3. Avec les notations de la question 2 on a $a_k = C_n^k \alpha_k$. Et alors

$$\begin{aligned}(n-k)a_k + (k+1)\xi a_{k+1} &= (n-k)C_n^{n-k}\alpha_k + (k+1)\xi C_n^{k+1}\alpha_{k+1} \\ &= n[\alpha_k C_{n-1}^k + C_{n-1}^k \xi \alpha_{k+1}].\end{aligned}$$

Il en résulte que $b_k = n(\alpha_k + \xi\alpha_{k+1})$.

4. Soit $P \in \operatorname{Ker} A_{\xi,n}$. Avec les notations qui précèdent, on a $\alpha_k + \xi\alpha_{k+1} = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Il vient $\alpha_k = \alpha_n(-1)^{n-k}\xi^{n-k}$ et finalement $P = \alpha_n(X-\xi)^n$. Le noyau est donc la droite vectorielle engendrée par $(X-\xi)^n$. On en déduit en particulier que $A_{\xi,n}$ établit une surjection de $\mathbb{C}_n[X]$ sur $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ (par le théorème du rang).

PARTIE IV. *Théorème de Laguerre.*

1. Notons ψ l'application $z \longmapsto \dfrac{1}{z-\xi}$. Il s'agit d'une homographie, qui *établit une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{\xi\}$ sur $\mathbb{C}^*$. On observe que ψ est la composée* de la translation $t : z \longmapsto z - \xi$ et de l'inversion $g : \ldots$ que si D est le disque de centre w et de rayon R, $t(D)$ est le disque de centre $w - \xi$ et de rayon R. Ce nouveau disque ne contient pas 0. Bref, il suffit de montrer que l'image d'un disque fermé ne contenant pas 0 par g est un disque fermé. Soit $D(w,R)$ un tel disque. Pour tout $z \neq 0$, on a $z \in D \iff |z-w|^2 \leqslant R^2$ ce qui est équivalent à : $z\bar{z} - \bar{w}z - w\bar{z} \leqslant R^2 - |w|^2$. On a $R^2 - |w|^2 < 0$ car $0 \notin D(w,R)$. En divisant par $|z|^2 > 0$ cela équivaut encore à

$$Z\bar{Z} - \frac{w}{|w|^2 - R^2}Z - \frac{\bar{w}}{|w|^2 - R^2}\bar{Z} \leqslant \frac{1}{R^2 - |w|^2}$$

où l'on a posé $Z = 1/z$. Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$$|z - w| \leqslant R \iff \left|Z - \frac{\bar{w}}{|w|^2 - R^2}\right| \leqslant \frac{R}{|w|^2 - R^2}.$$

D'où le résultat.

2. Soit $R(X) = \dfrac{P(X)}{(X-\xi)^n}$. On a $R'(X) = -\dfrac{A_{\xi,n}(P)}{(X-\xi)^{n+1}}$. Si on écrit la formule de Taylor pour P au point ξ, on a

$$P(X) = P(\xi) + P'(\xi)(X-\xi) + \cdots + \frac{P^{(n)}(\xi)}{n!}(X-\xi)^n$$

ce qui donne en divisant par $(X-\xi)^n$,

$$R(X) = Q\left(\frac{1}{X-\xi}\right)$$

avec $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(n-k)}(\xi)}{(n-k)!}X^k$ qui est bien de degré n, car ξ n'est pas racine de P. L'unicité de Q est claire car ses valeurs sont imposées sur $\mathbb{C}^*$ qui est un ensemble infini.

3. Si t est une racine complexe de Q, t n'est pas nulle (car comme P est de degré n, $P^{(n)}(\xi) \neq 0$) et $z = \psi^{-1}(t)$ est alors racine de P. Donc $z \in D$ et $t \in D'$. D'après le théorème de Gauss-Lucas (cf. II.3) les racines de Q' sont aussi dans D'.

4. Dérivons la relation $R(X) = Q\left(\dfrac{1}{X-\xi}\right)$. Il vient

$$-R'(X) = \frac{A_{\xi,n}(P)}{(X-\xi)^{n+1}} = Q'\left(\frac{1}{X-\xi}\right)\frac{1}{(X-\xi)^2}$$

Soit z une racine de $A_{\xi,n}(P)$. On sait que $z \neq \xi$ car ξ n'est pas racine de P. On peut donc évaluer l'expression ci-dessus en z. Il en résulte que $Q'(\psi(z)) = 0$. Donc $\psi(z) \in D'$ et donc $z \in D$.

PARTIE V. *Théorème de Grace (1902).*

1. On utilise de manière répétée le résultat de III.3. Pour conjecturer le résultat regardons les premiers polynômes. On a

$$P_1 = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k n[a_k + \xi_1 a_{k+1}]X^k$$

puis,

$$P_2 = \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k n(n-1)[a_k + a_{k+1}(\xi_1+\xi_2) + a_{k+2}\xi_1\xi_2]X^k$$

et on devine alors ce qui se passe. On montre par une récurrence finie, que pour $j \in [\![1,n]\!]$,

$$P_j = \sum_{k=0}^{n-j} C_{n-j}^k \frac{n!}{j!}[a_k + a_{k+1}\sigma_1(\xi_1,\dots,\xi_j) + \dots + a_{k+j}\sigma_j(\xi_1,\dots,\xi_j)]X^k$$

où $\sigma_i(\xi_1,\dots,\xi_j)$ est la i-ième fonction symétrique élémentaire des complexes $\xi_1,\dots,\xi_j$. En particulier, P_n est le polynôme constant égal à

$$n![a_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + \dots + a_n\sigma_n]$$

où les σ_i sont les fonctions symétriques élémentaires des ξ_k. On les exprime à l'aide des b_k :

$$P_n = \frac{n!}{b_n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k a_k b_{n-k}$$

2. Par récurrence finie sur i, on montre en utilisant le théorème de Laguerre que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $Z(P_i) \subset D$.
3. Si P et Q sont apolaires la conclusion ci-dessus est absurde car P_n est nul. C'est donc qu'il existe au moins une racine ξ_i de Q dans le disque D.
4. Soit $P = a_nX^n - X + 1$, $a_n \neq 0$. Les racines de $Q = (1-X)^n - 1$ sont toutes sur le cercle de centre 1 et de rayon 1. Montrons que P et Q sont apolaires. On a $Q = \sum_{k=1}^{n} C_n^k(-1)^kX^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k X^k$ où $b_k = (-1)^k$ sauf pour $k=0$ où $b_0 = 0$. De même $P = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k X^k$ où tous les a_k sont nuls sauf a_n, $a_1 = -\frac{1}{n}$ et $a_0 = 1$. La condition d'apolarité s'écrit donc

$$(-1)^n a_n b_0 - C_n^1 a_1 b_{n-1} + a_0 b_n = 0$$

ce qui est vérifié. Il résulte de la question 3 que P admet toujours une racine dans le disque $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z-1| \leqslant 1\}$.

PARTIE VI. *Théorème de Grace-Heawood (1907).*

1. On a

$$Q(X) = (X-1)^n - (X+1)^n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{n}{n-k}[(-1)^{n-k} - 1]X^k.$$

Posons $P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a_k X^k$. Un calcul direct conduit au résultat mais il est plus rapide de noter que

$$\int_{-1}^{1} P'(t) = P(1) - P(-1) = 0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{a_k}{k+1}[1-(-1)^{k+1}]$$

et on reconnait, au facteur n près, la condition d'apolarité entre P' et Q.
2. On va chercher les racines de Q. Comme 1 n'est pas racine de Q, $Q(z) = 0$ équivaut à $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$. On sait que les racines n-ième de l'unité sont les nombres complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. La quantité $\frac{z+1}{z-1}$ ne peut pas valoir 1 donc k ne peut être nul. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, la relation $\frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ conduit à $z = i\cot\mathrm{an}\frac{k\pi}{n}$. Les racines de Q (qui est de degré $n-1$) sont donc les imaginaires purs $\left(i\cot\mathrm{an}\frac{k\pi}{n}\right)_{1\leqslant k\leqslant n-1}$. Elles sont toutes dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $\cot\mathrm{an}\frac{\pi}{n}$. D'après le théorème de Grace, ce disque contient un zéro de P'.
3. Soit $z_1 \neq z_2$ deux racines de P. Posons $a = \frac{z_2 - z_1}{2}$ et $b = \frac{z_1+z_2}{2}$. La similitude $f : z \longmapsto az + b$ envoie -1 sur z_1 et 1 sur z_2. Posons alors $P_1(X) = P(aX+b)$. On a $P_1(1) = P_1(-1) = 0$ et $\deg(P_1) = \deg P = n$. Donc, d'après la question 2, $P_1'(X) = aP'(aX+b)$ admet une racine dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $\cot\mathrm{an}\frac{\pi}{n}$. L'image de cette racine par f est une racine de P' qui se trouve dans $f(D)$ et $f(D)$ est le disque de centre $\frac{z_1+z_2}{2}$ (une similitude conserve les milieux) et de rayon $|a|\cot\mathrm{an}\frac{\pi}{n}$. Et comme le rapport de la similitude f est $|a| = \frac{|z_2-z_1|}{2}$, c'est gagné.
4. Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que le disque est centré en 0 : on le note $D(0,R)$. Notons z_1 et z_2 les deux racines de P qui sont dans ce disque et D le disque de centre $\frac{z_1+z_2}{2}$ et de rayon $\frac{|z_2-z_1|}{2}\cot\mathrm{an}\frac{\pi}{n}$. *Comme P' admet une racine dans D d'après la question*

précédente, il suffit de montrer que $D \subset D\left(0, \frac{R}{\sin \pi/n}\right)$, et ce quel que soit l'emplacement des points z_1 et z_2 dans $D(0, R)$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'il suffit de le prouver lorque z_1 et z_2 sont sur le cercle de centre 0 et de rayon R. A rotation près, on peut supposer que $z_1 = Re^{i\theta}$ et $z_2 = Re^{-i\theta}$ avec $0 < \theta \leqslant \pi/2$. Le point de module maximal dans D est alors $\frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{|z_2 - z_1|}{2} \operatorname{cotan} \pi/n$ et son module vaut

$$R \cos \frac{\theta}{2} + R \sin \frac{\theta}{2} \operatorname{cotan} \frac{\pi}{n} = R \frac{\sin(\pi/n + \theta/2)}{\sin \pi/n}$$

Le résultat en découle alors en majorant le sinus du numérateur par 1.

Commentaires. *Le très classique théorème de Gauss-Lucas de II est le point de départ de la "Géométrie des Polynômes". La première preuve de ce résultat a été publiée par F. Lucas en 1874, mais le théorème était déjà connu de Gauss. Le ressort essentiel de la démonstration est le recours à la décomposition en éléments simples de la dérivée logarithmique P'/P. On observera qu'il implique le fait non moins classique suivant : si P est un polynôme réel scindé sur $\mathbb{R}$, P' est lui aussi scindé sur $\mathbb{R}$. Bien sûr, cet énoncé se prouve de façon plus naturelle à l'aide du théorème de Rolle et d'un petit décompte de multiplicité des racines.*

La notion de dérivée polaire de la partie III et le théorème de la partie IV se trouvent dans les oeuvres de Laguerre, publiées en 1898. Le lecteur observera que ces deux parties III et IV reposent sur la seule idée suivante : on fixe un disque fermé D de $\mathbb{C}$, un point ξ dans $\mathbb{C} \setminus D$ et on transforme par l'homographie $z \longmapsto \frac{1}{z - \xi}$ l'énoncé du théorème de Gauss-Lucas relatif à D. La dérivée polaire et le théorème de Laguerre apparaissent alors naturellement.

En itérant le théorème de Laguerre, on est conduit simplement à la notion d'apolarité et au théorème de Grace de la partie V. Malgré son caractère technique, ce dernier résultat est extrêmement puissant, comme l'illustrent les applications de VI. Le lecteur pourra trouver d'autres applications dans les références suivantes :

- *Marden*, The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable, *AMS, 1949*
- *Borwein, Erdelyi*, Polynomials and Polynomials Inequalities, *Springer-Verlag, GTM 161*
- *Mignotte, Stefanescu*, Polynomials an algorithmic approach, *Springer-Verlag.*